ГЛАВА 3

ПРОЧНОСТЬ ГОРНЫХ ПОРОД В СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

3.1. Развитие представлений о прочности и разрушении твердых тел

3.2. Теория разрушения горных пород в сложном напряженном состоянии

3.3. Эмпирический критерий прочности Хока-Брауна

3.4. Испытание горных пород в сложном напряженном состоянии

Характерной особенностью выработок, находящихся на больших глубинах, является наличие зоны разрушенных пород, образующейся между упруго деформированной частью породного массива и крепью. Эта зона, как правило, полностью охватывает контур выработки и играет роль своеобразного демпфера, снижающего уровень напряжений в приконтурном пространстве. Размеры зоны, величина смещений породного контура, наличие пучения горных пород или динамических проявлений горного давления в немалой степени зависят от того, каким образом протекает процесс разрушения массива в окрестности выработки.

3.1. Развитие представлений о прочности и разрушении твердых тел

Общим свойством практически всех конструкционных материалов является их твердость, что следует понимать, как способность сохранять исходные размеры и целостность при небольших (не более 1-3 %) относительных деформациях. Горные породы, если их рассматривать как материал, среду, в которой проходится выработка, также в подавляющем своем большинстве, как уже говорилось выше, могут быть отнесены к твердым телам.

Проблема прочности и неразрывно связанное с ней явление разрушения твердых тел существуют с тех пор, когда, создавая то или иное сооружение, человек стал задумываться над соответствием его надежности затратам, связанными со строительством. По этому поводу существуют сотни книг и статей, в физике определилось самостоятельное направление – механика разрушения [52, 53].

Механическое разрушение вследствие силового воздействия можно определить, как результат некоторого деформирования и разрыва структурных связей материала конструкции. Исследование этого процесса, как и решение любой задачи, происходит на основе физических моделей, имитирующих реальные твердые тела. В зависимости от целей исследования изучению и анализу можно подвергнуть сравнительно небольшое количество моделей (рис. 3.1). К ним относятся **структурные** модели, рассматривающие твердые тела на атомно-молекулярном уровне, и **бесструктурные**, когда объект изучения представляется в виде сплошного однородного тела.

Структурные модели, как статические, так и динамические, изучаются методами физики твердого тела; бесструктурные – методами

механики твёрдого деформируемого тела. Существуют также комбинированные модели, с помощью которых среду представляют как сплошное тело, состоящее из хаотически расположенных структурных элементов, обладающих, в свою очередь, микроструктурой более низкого уровня. При этом структурные элементы и на макро-, и на микроуровнях имеют отличающиеся физико-механические характеристики. Изучение таких моделей ведется также на основе механики твёрдого деформируемого тела, но с привлечением методов теории вероятностей.

Рентгеноструктурные исследования горных пород позволили достаточно точно установить их строение, в соответствии с чем они могут быть разделены на кристаллические и аморфные. Причем, подавляющее число литологических разностей, в том числе все породы осадочного типа, относятся к группе поликристаллических твердых тел.

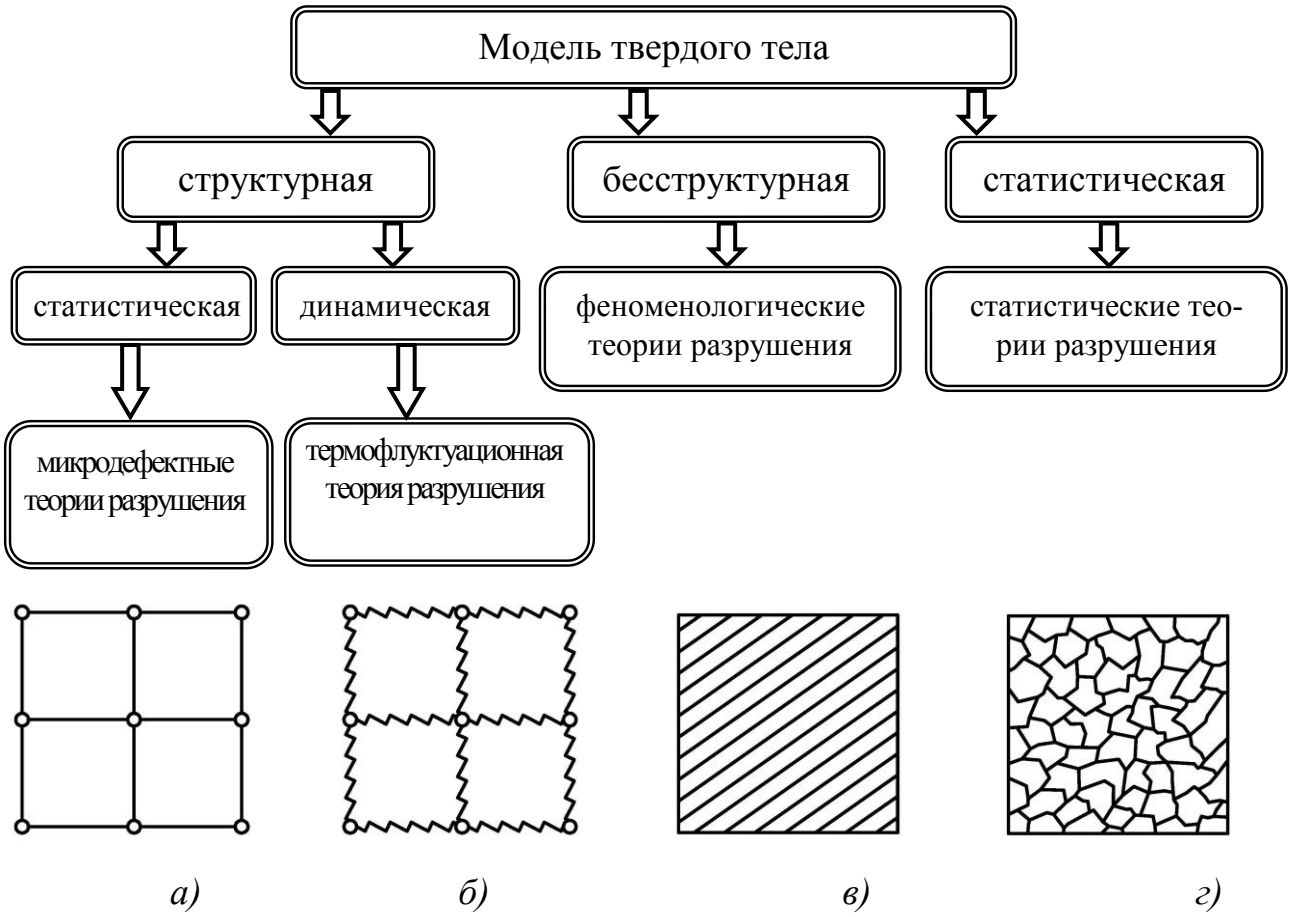


Рис. 3.1: Модели твердого тела:
а) структурная, статическая; б) структурная, динамическая;
в) бесструктурная; г) статистическая

Основным свойством кристаллического состояния вещества является геометрически правильное расположение частиц в пространстве. Частицами могут быть атомы, ионы или молекулы. Кристаллы имеют строение так называемой пространственной решетки, представляющее собой периодическое повторение одной и той же группы частиц. Такая группа частиц образует элементарную ячейку, являющуюся исходной структурной единицей.

Принимая в качестве основной структурную модель твердого тела в виде идеальной кристаллической решетки, по углам которой находятся частицы, удерживаемые силами связи, можно рассчитать величину усилия, которое потребуется, чтобы разорвать эту связь и тем самым разрушить деформируемое тело. Впервые эту задачу для хрупких материалов удалось решить А.А. Гриффитсу [46]. Опираясь на аналитические исследования Г.В. Колосова и Инглиса [55], в которых рассматривалась задача о распределении напряжений вокруг эллиптических вырезов при заданных граничных условиях, А.А. Гриффитс показал, что прочность хрупких твердых тел определяется прочностью на разрыв структурных связей, существенно ослабленных за счет микродефектов. Эти микродефекты (трещины) неизбежно, по разным причинам, присутствуют в исходном материале. В осадочных породах, например, их наличие связано с генезисом и последующим метаморфизмом.

А.Ф. Иоффе [56], производя опыты с каменной солью, установил, исходя из предположений А.А. Гриффитса, что наиболее опасными являются микротрещины, расположенные на поверхности нагружаемого объекта. Растворяя эти дефекты в воде, ему удалось получить прочность на разрыв кристаллов каменной соли, близкую к теоретической.

Свои умозаключения относительно ослабляющего влияния микродефектов на прочность твердых тел А.А. Гриффитс воплотил в стройную теорию прочности, составившую основу дальнейших исследований в области так называемых **микродефектных** теорий прочности.

Критерий, пользуясь которым можно определить, произойдет или не произойдет разрушение твердого тела, имеет вид [57]

$$\left(\sigma_1 - \sigma_3\right)^2 + 8R_p\left(\sigma_3 + \sigma_1\right) = 0, \text{ если } 3\sigma_3 + \sigma_1 > 0, \qquad (3.1)$$

$$\sigma_3 = R_p, \text{ если } 3\sigma_3 + \sigma_1 < 0. \qquad (3.2)$$

Положив в выражении (3.1) $\sigma_3 = 0$, получим соотношение между пределом прочности на одноосное сжатие и пределом прочности на одноосное растяжение,

$$R_C = -8R_p, \qquad (3.3)$$

что вполне хорошо согласуется с опытными данными для горных пород [21, 24].

Теория прочности, разработанная А.А. Гриффитсом в начале 20-х годов, вполне отвечает современным представлениям о механизме разрушения твердых тел и достаточно хорошо согласуется с опытными данными. Именно по этой причине ей уделяется так много внимания в специальных исследованиях, где она получила свое дальнейшее развитие.

Микродефектные теории едины в том, что они рассматривают разрушение как результат дезинтеграции твердого тела вдоль одной магистральной трещины. Так разрушаются, например, породные откосы, склоны, борта карьеров и тому подобные объекты. В горных выработках хрупкое разрушение происходит иначе, оно реализуется в виде системы трещин. Для описания такого механизма трещинообразования необходимо введение в рабочие гипотезы специальных предпосылок.

При деформировании твердых тел всегда существует два механизма, благодаря которым происходит разрушение материала - пластическое течение (сдвиг) и хрупкое растрескивание (отрыв). На это обстоятельство указывал еще Прандтль [58], подчеркивая, что следует различать два типа разрушения: хрупкое, которое происходит путем отрыва по плоскостям, перпендикулярным к растягивающей силе, и вязкое - от сдвига.

Эти вопросы получили широкое развитие в трудах Н.Н. Давиденкова [58], Я.Б. Фридмана [59], Г.В. Ужика [60] и др. Понятие о хрупком и вязком разрушении служит физической основой для разработки тех или иных критериев прочности.

В настоящее время можно считать установленным, что разрушение только путем отрыва или только путем сдвига невозможно в принципе. Если пластическая деформация, вызываемая касательными напряжениями, разрыхляет материал и готовит его к разрыву, то

нарушение сплошности происходит под действием нормальных растягивающих напряжений.

Механизм пластического деформирования твердых тел в результате деформаций сдвига был раскрыт в 1934 г. Дж. Тейлором, который первый пришел к мысли о существовании линейных дефектов в кристаллических решетках – **дислокаций** [61]. Дислокации зарождаются у кончиков трещин или иных концентраторов напряжений, они могут взаимодействовать друг с другом и существенно при этом размножаться (источник Франка-Рида).

В твердых телах типа горных пород пластические деформации начинаются при сравнительно небольших нагрузках. Среди множества хаотически расположенных кристаллов всегда найдется некоторое число наименее выгодно ориентированных по отношению к внешним усилиям и имеющих внутренние дефекты типа дислокаций. Эти кристаллики деформируются пластически уже при сравнительно небольших внешних усилиях. Число этих кристалликов сравнительно невелико и местные пластические деформации заметно не сказываются на общей зависимости между силой и перемещением, свойственной начальной стадии нагружения.

При больших внешних усилиях пластические деформации становятся преобладающими. Необратимые сдвиги происходят в большинстве кристаллов по наиболее слабым поверхностям, в особенности, если они имеют направление, близкое к поверхностям максимальных касательных напряжений. Это находит свое отражение в образовании полос скольжения (линии Чернова-Людерса) на полированных боковых поверхностях деформируемых породных образцов.

В результате приложения внешних сил в кристаллах возникают смещения атомов не только на целое число позиций, но и происходит также некоторое искажение кристаллической решетки. Таким образом, наряду с пластической деформацией существует и упругая. Установлено, что пластическое деформирование в результате сдвига необратимо и протекает без изменения объема материала.

Второй важный этап в развитии представлений о прочности, вслед за учетом атомного строения, заключался в учете влияния теплового движения в твердом теле на процесс разрушения. Переход к этапу учета теплового движения был связан, в частности, с накоплением экспериментальных данных о свойствах “пределов” упругости, прочности и текучести, когда было выяснено, что эти пределы нестабильны и их величина существенно зависит от условий измерений.

Такое непостоянство “пределов” упругости, прочности и текучести указывало на какую-то общую физическую причину, делающую их неоднозначными, а всеми принятую статическую модель среды - неполной. Этой причиной оказалось тепловое движение атомов в твердом теле.

Учет теплового движения атомов внес серьезные изменения в чисто “механическую” постановку задачи. Ведь в этом случае внешним усилиям сопротивляется уже не статический ансамбль связанных атомов, а некоторая система, находящаяся в колебательном движении.

Систематическое изучение температурно-временной зависимости прочности было начато С.Н. Журковым в 1952 году [62-65]. В основном, работам этой школы обязана своему становлению и развитию **термофлуктуационная** теория прочности твердых тел.

Опыты на растяжение твердых тел с самой различной структурой (монокристаллы, поликристаллы, полимеры, композиционные материалы), выполненные в разных условиях, показали, что зависимость долговечности τ от действующего напряжения σ и температуры T всегда описывается эмпирической формулой одного и того же вида

$$\tau = \tau_0 \exp(u_0 - \gamma\sigma)/kT, \qquad (3.4)$$

где k - постоянная Больцмана; u_0, τ_0 и γ - некоторые константы испытуемого материала.

Фундаментальные исследования Я.И. Френкеля [66, 67], в которых он детализировал характер теплового движения атомов в твердых телах и жидкостях, позволили однозначно определить физический смысл и численное значение констант, входящих в зависимость (3.4): τ_0 - период колебаний атома вблизи положения равновесия ($\tau_0 \approx 10^{-13}$с); u_0 - энергия межатомных связей; γ - величина, связанная со структурными особенностями деформируемого тела.

Таким образом, основное уравнение термофлуктуационной теории прочности имеет реальный физический смысл и отражает закономерности процессов, протекающих в нагруженном твердом теле на атомном уровне. Причиной разрушения служат энергетические флуктуации атомов при тепловом движении.

Кроме описанной выше, существует еще одна теория термофлуктуационной прочности, активно развивающаяся в последнее время [68, 69]. В рамках этой теории механизм зарождения трещины происходит в результате накачки энергии из окружающей среды в разрушающую флуктуацию плотности - **дилатон**. Это приводит к разогреву и тепло-

вому расширению дилатонов до критической величины, распаду дилатонов и образованию в твердом теле микротрещин.

При разрыве на границе дилатона возникает перепад давлений. В результате дилатон оказывается не только очагом локального разрушения, но и является одновременно точечным флуктуационным источником дислокаций. Таким образом, элементарные механизмы разрушения и пластической деформации оказываются взаимосвязанными и действующими одновременно.

Дилатонная теория прочности позволяет объяснить причину разрушения бездефектных структур в силу внутренней, присущей любому ансамблю атомов, неустойчивости.

На современном этапе развития кинетическая теория прочности, хотя и объясняет физику процессов, лежащих в основе разрушения твердых тел, не может быть использована для количественных расчетов. Она разработана, по сути дела, только для случая одноосного растяжения, в то время, как подавляющее большинство конструкций, в том числе и породный массив в окрестности горных выработок, находятся в условиях сложного напряженного состояния.

Кинетическая теория прочности ничего не говорит о том, как будут сливаться микродефекты в магистральные трещины, являющиеся признаком разрушения твердого тела. Этот недостаток теории можно было бы устранить, если бы существовал способ суммировать отдельные акты разрушения. Идея суммирования повреждений была сформулирована Больцманом и получила существенное развитие в работах Л.М. Качанова, Ю.Н. Работнова, Г.Г. Литвинского и др. ученых.

Исследования твердых тел на основе структурных моделей позволили понять механизм, лежащий в основе их прочности, и высказать основные концепции теории разрушения. Однако реальные твердые тела существенно отличаются от тех идеализированных представлений, которые лежат в основе рассмотренных выше теорий. Инженерная практика требует наличия конкретных формул, позволяющих оценивать прочность проектируемых конструкций.

Именно это обстоятельство способствовало разработке практических теорий прочности, в основе которых лежат бесструктурные модели сплошного деформируемого твердого тела. На настоящий момент из всех представленных на рис. 3.1 моделей этот класс изучен наиболее полно.

Бесструктурная модель сплошного твердого деформируемого тела с точки зрения связи между внешним воздействием и полученным результатом представляет собой так называемый “черный ящик”. “Черным ящиком” принято называть любую систему со стохастической структурой, которая как-то преобразует внешний сигнал (воздействие) и выдает результат (итог опыта) в виде некоторой случайной величины. Теории разрушения, основанные на изучении бесструктурных моделей, получили название **феноменологических.**

Инженерные теории прочности исходят из предположения, что разрушение твердых тел происходит в том случае, когда определенная комбинация компонентов напряжений (деформаций) достигает критического уровня. В самом общем виде условие разрушения для главных компонентов напряжений может быть представлено в виде

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \le k, \qquad (3.5)$$

где F- некоторая функция, связывающая в одно соотношение компоненты напряжений, и которая в предельном состоянии равна критерию разрушения k, зависящему обычно от основных прочностных характеристик материала: пределов прочности на сжатие, растяжение и сдвиг.

Длительное время были известны четыре, так называемые классические, теории прочности. Одна из них (Кулона-Треска-Сен-Венана) не потеряла своей актуальности и в настоящее время применительно к пластичным материалам.

Дальнейшее развитие теорий прочности шло, в основном, по пути обоснования аналитических критериев, которые позволяли бы наиболее точно устанавливать предельное состояние в любых конструкционных материалах, в том числе и относящихся к хрупким, неодинаково сопротивляющихся усилиям растяжения и сжатия, какими в подавляющем большинстве являются горные породы.

Применительно к таким материалам О. Мор [70] предложил теорию прочности, суть которой заключается в следующем: разрушение происходит в том случае, если касательные напряжения, являющиеся функцией нормальных, достигнут определенного уровня. При этом прочность горных пород практически не зависит от величины среднего по величине напряжения σ_2.

Специально поставленные опыты для выяснения степени влияния среднего по величине нормального напряжения σ_2 показали, что ошибка от неучета σ_2 [71, 72] не превышает 10-15% и находится

в пределах точности измеряемых параметров. Для хрупких анизотропных пород влияние σ_2 несколько увеличивается [73].

Таким образом, предпосылка, принятая Мором, подтверждается в целом опытами и существенно упрощает исследование поведения горных пород в сложном напряженном состоянии.

Теория О. Мора не имеет аналитического критерия прочности. Она является эмпирической, полностью базируясь на экспериментальных данных, что делает её весьма надежной. Отличаясь большой широтой в смысле охвата явлений, обнаруженных при опытах, теория О. Мора продолжает совершенствоваться. В частности, как развитие этой теории, следует отметить эмпирический критерий прочности Хоека-Брауна, очень популярный в геомеханических исследованиях, подробный анализ которого будет выполнен ниже.

Изучая вопросы пластического деформирования Мизес в 1913 и Губер в 1914 г. независимо пришли к выводу, что в качестве критерия прочности следует принимать не всю величину потенциальной энергии, а только ту ее часть, которая идет на изменение формы. Теория прочности Губера-Мизеса неплохо подтверждается опытными данными для пластичных материалов.

Теории прочности О. Мора, Треска-Сен-Венана и Губера-Мизеса являются наиболее употребимыми при решении упругопластических задач в механике горных пород.

Значительные объемы исследований прочности и разрушения горных пород в сложном напряженном состоянии выполнены под руководством А.Н. Ставрогина. Им предложено экспоненциальное условие прочности. Результаты работ этого направления обобщены в монографиях [40, 41].

Упругопластическая задача при экспоненциальном условии прочности детальном исследована в работе Аннина Б.Д. [74].

Исследования разрушения горных пород в условиях жесткого нагружения позволили сформулировать целый ряд теорий прочности, учитывающих неоднородность материалов, проявляющуюся в процессе разрушения [2, 40-43]. Для учета этого обстоятельства, отраженного в параметрах ниспадающего участка кривой из графика деформирования, в условие прочности обычно вводят так называемую функцию снижения прочности. Тогда условие прочности (3.5) может быть записано следующим образом:

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \le k(x, y, z), \qquad (3.6)$$

где $k\ (x, y, z)$ – критерий прочности, величина которого различна в разных точках области разрушения.

Общие требования, предъявляемые к феноменологическим теориям прочности, сформулированы Г.С. Писаренко и А.А. Лебедевым в работе [75, 76].

Авторы всех рассмотренных выше теорий прочности исходили из предположения об идеальном строении твердого тела, которое либо обладает структурой, либо является сплошным, однородным. Реальные же конструкционные материалы и горные породы далеко не так совершенны.

По этой причине, в частности, от теорий прочности нельзя требовать идеального совпадения с данными экспериментов. Особенно велико это отклонение в том случае, если изучаемый материал содержит достаточно крупные дефекты – включения, поры и т.п., существенно отличающиеся по своим физико-механическим свойствам. К таким материалам с несовершенной структурой и относятся, прежде всего, горные породы.

Для неоднородных твердых тел детерминированная модель сплошной среды оказывается недостаточной. Поскольку места концентрации напряжений являются локальными и приурочены к неоднородностям, которые размещены в материале случайным образом, то существенное значение приобретает статистическая трактовка прочности.

Мысль о статистической природе прочности впервые была высказана советскими физиками А.П. Александровым и С.И. Журковым в 1933 г. [77]. Дальнейшее развитие статистические теории прочности получили развитие в работах Вейбулла [78], Т.А. Конторовой и Я.И. Френкеля [79], Фишера и Холломона [80], С.Д. Волкова [81], Н.Н. Афанасьева [82], Л.Г. Седракяна [83], Бреди [84], В.В. Болотина [85], Б.М. Струнина [86] и др.

Общий подход к описанию прочности неоднородных сред предложен И.М. Лифшицем и Л.Н. Розенцвейгом [87] на основе метода Дж. Гиббса. Наиболее удачными разработками в этом направлении являются статистические теории прочности С.Д. Волкова и Л.Г. Седракяна.

Таким образом, современные представления о разрушении твердых тел в своем становлении прошли три этапа. На феноменологическом этапе считалось, что разрушение наступает при достижении некоторыми

комбинациями компонентов тензора напряжений (деформаций) определенных предельных значений.

На структурном уровне разрушение представляется как преодоление межатомного притяжения приложенным напряжением, существенно усиленным различного рода дефектами структуры.

Современный термофлуктуационный этап рассматривает разрушение как процесс, хотя и зависящий от параметров дефектной структуры, но осуществляемый флуктуациями теплового движения.

Этапный характер развития представлений о разрушении отражается в наличии трех соответствующих подходов к решению проблемы прочности, которые сосуществуют, взаимно дополняя и обогащая друг друга. По мере совершенствования этих методов и подходов все три направления позволят, видимо, со временем разработать некоторую общую теорию прочности твердых тел.

3.2. Теория разрушения горных пород в сложном напряженном состоянии

Предпосылка о малом влиянии промежуточного по величине напряжения на разрушение горных пород является единственной в теории Мора, которая в остальном не требует проверки, поскольку полностью основывается на экспериментальных данных. Однако, аналитический критерий прочности получается путем подбора соответствующего эмпирического выражения и его применение ограничивается по существу той областью напряженных состояний, в которой выполнены эксперименты. Таким образом, экспериментальный характер обеспечивает достаточно точное описание предельного состояния материала, эмпирический же подбор условия прочности не дает возможности в полной мере воспользоваться этим преимуществом.

Поэтому представляется интересным вывод аналитического критерия теории на основе анализа процесса разрушения в локальной области твердого тела, который может быть представлен следующим образом. Касательные напряжения, величина которых достаточно полно характеризуется интенсивностью напряжений σ_i, разрыхляют материал путем сдвига, а под действием нормальных напряжений, уровень которых определяется шаровым тензором I, происходит раскрытие трещин. Совместное действие двух видов разрушения (сдвиг и отрыв) приводит, как было уже отмечено выше, к потере прочности материа-

ла. Подобная схема разрушения находится в хорошем соответствии с дислокационной и дилатонной теориями возникновения хрупкой трещины.

Ряд современных теорий прочности был получен на основе отмеченной модели разрушения твердых тел из общей функциональной зависимости [34], объединяющей в одно соотношение интенсивности напряжений σ_i и компоненты шарового тензора I:

$$\sigma_i^2 + aI^2 + bI = c, \tag{3.7}$$

где a, b, c – некоторые параметры, определяемые из испытаний при простейших напряженных состояниях:

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2}, \tag{3.8}$$

$$I = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3. \tag{3.9}$$

Следуя гипотезе Мора, предположим, что прочность материала практически зависит только от тех членов выражений (3.8) и (3.9), которые определяют разность и сумму наибольшего и наименьшего компонентов напряжений. Тогда из (3.7) при a= 0, получим следующее выражение:

$$\frac{1}{2}\left(\sigma_1 - \sigma_3\right)^2 + b(\sigma_1 + \sigma_3) = c. \tag{3.10}$$

Параметры b и c определим из (3.10) в результате испытаний горных пород при простейших напряженных состояниях: при одноосном сжатии в предельном состоянии получим

$$\frac{1}{2}R_c^2 + bR_c = c, \tag{3.11}$$

при одноосном растяжении

$$\frac{1}{2}R_p^2 - bR_p = c. \tag{3.12}$$

Решая совместно уравнения (3.11) и (3.12), находим, что

$$b = \frac{1}{2}R_c(\Psi\text{-}1); \qquad c = \frac{1}{2}R_c^2\ \Psi, \qquad \text{где } \Psi = \frac{R_p}{R_c}. \tag{3.13}$$

Подставив значения параметров (3.13) в соотношение (3.10), получим следующее условие прочности

$$\left(\sigma_1 - \sigma_3\right)^2 - R_c^2\psi - (1-\psi)R_c\left(\sigma_1 + \sigma_3\right) = 0, \tag{3.14}$$

или в общем случае напряженного состояния

$$(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}^2-R_C^2\psi-(1-\psi)R_C(\sigma_x+\sigma_y)=0. \quad (3.15)$$

Из выражения (3.14) получим

$$\sigma_1-\sigma_3=2k, \quad (3.16)$$

где $$k=0{,}5\sqrt{R_C^2\psi+(1-\psi)R_C(\sigma_1+\sigma_3)}. \quad (3.17)$$

Заметим, что при осесимметричном распределении напряжений $\sigma_1+\sigma_3=\sigma_r+\sigma_\theta=const$. Из этого следует, что выражение (3.16) является по своей сути условием прочности Треска-Сен-Венана. В общем же случае напряженного состояния правая часть условия (3.16) зависит от значений компонентов напряжения.

Для материалов, одинаково сопротивляющихся сжатию и растяжению, $\psi=1$. В этом случае из выражения (3.16) получим теорию прочности Кулона.

При $\psi = 0$ из (3.14) получим следующее частное выражение теории прочности

$$\sigma_1-\sigma_3=\sqrt{R_C(\sigma_1+\sigma_3)}\ . \quad (3.18)$$

Обозначим соответственно максимальное касательное напряжение и величину, характеризующую вид напряженного состояния, как $\tau=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}$ и $\sigma=\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}$. Тогда выражение (3.14) с учетом принятых обозначений примет вид

$$4\tau^2-2\sigma(1-\psi)R_c-\psi R_c^2. \quad (3.19)$$

Зависимость (3.19) в системе координат «τ - σ» представляет уравнение параболы, которая является выпуклой и непрерывной кривой.

В системе же координат «σ_1-σ_3» уравнение (3.14) имеет вид параболы, равнонаклоненной к осям и открытой со стороны сжимающих напряжений, что соответствует требованию симметричности условия возникновения предельного напряженного состояния рис. 3.2.

С увеличением величины ψ от 0 до 1 парабола вытягивается в сторону всестороннего растяжения, что подтверждается опытами Г.В. Ужика [60]. И, наконец, при ψ= 1 парабола вырождается в две параллельные прямые, соответствующие теории «энергии формоизменения».

Таким образом, полученное условие прочности отвечает требованиям постулата Друккера [88] и соответствует современным представлениям о природе разрушения твердых тел [34, 75].

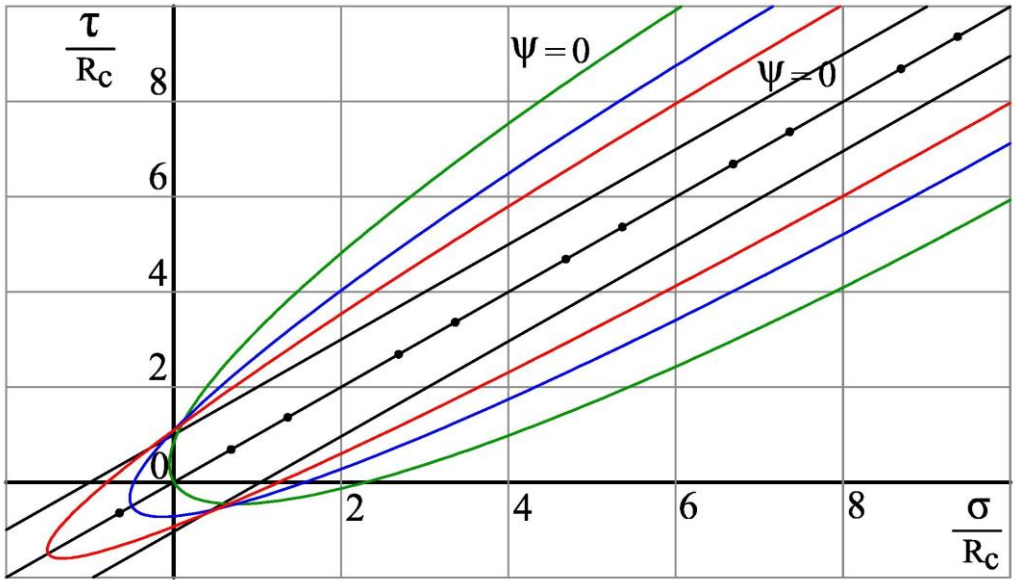


Рис. 3.2. Поверхность предельных состояний по формуле (3.19)

Разрушение хрупких материалов, как уже отмечалось, достаточно хорошо описывается теорией Гриффитса. Муррель показал [80], что в системе координат «τ - σ» основное уравнение теории Гриффитса может быть представлено следующим образом

$$4\tau^2 - 2R_C\sigma - 0{,}25R_C^2 = 0. \qquad (3.20)$$

Если в зависимости (3.18) положить, согласно Гриффитсу, $\psi = 1/8$ и сравнить ее с зависимостью (3.20), то окажется, что аналитические выражения двух теорий прочности, полученных на основе разных физических представлений о природе разрушения, являются практически идентичными.

Условие прочности (3.14) при $\psi = 1$ было проверено Баушингером, который показал, что оно хорошо описывает процесс разрушения пластичных материалов. Еще ранее аналогичные опыты были проведены Треска [37].

На рис. 3.3 и рис. 3.4 показана теоретическая кривая зависимости (3.14) в системе безразмерных координат ($X = \frac{\sigma_1}{R_C}; Y = \frac{\sigma_3}{R_C}$) и результаты испытаний горных пород, полученные А.Н. Ставрогиным [30] и Х. Куком [81].

Несмотря на некоторый имеющийся разброс экспериментальных точек, неизбежный при испытаниях столь структурно неоднородных материалов, какими являются горные породы и бетоны, из рисунков следует, что предлагаемое условие прочности (3.14) достаточно хрошоо описывает процесс их разрушения при объемном сжатии и сжатии с растяжением.

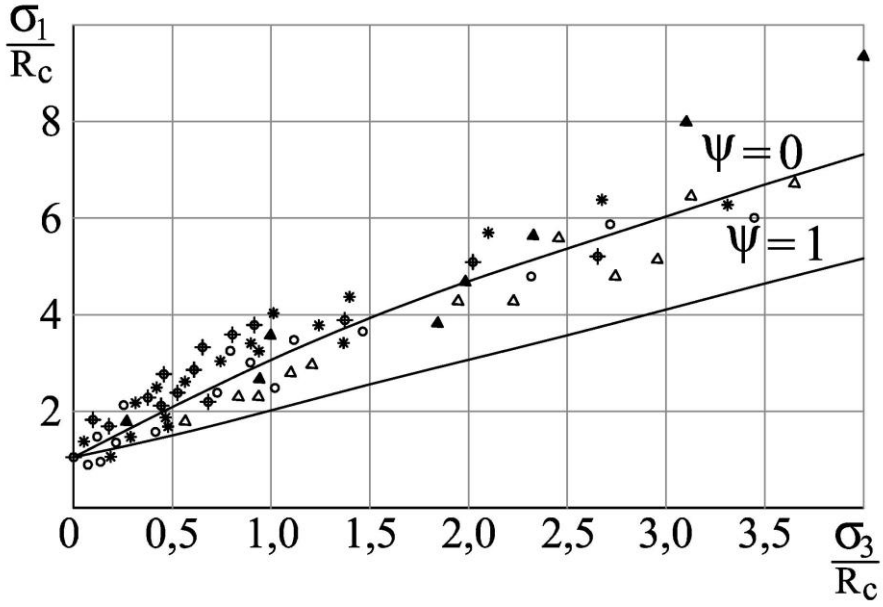


Рис. 3.3. Сравнение аналитического критерия (3.14) с результатами испытаний горных пород и бетона [40]: ○ - известняк, Δ - аргиллит, ▲ - талькохлорит, -○- - мрамор 1, + - диабаз, * - диорит, ¤ - алевролит Д-19, песчаник Д-12, -●- - бетон

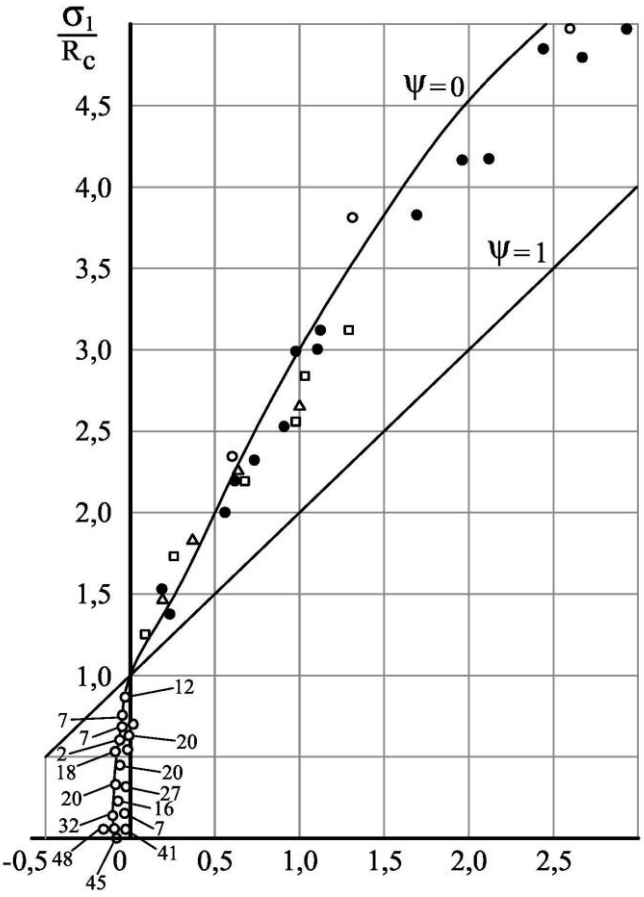


Рис. 3.4. Сравнение аналитического критерия (3.14)
с результатами испытаний горных пород [89]

Из выражения (3.14) может быть получена формула для приведения сложного напряженного состояния к простому одноосному. Она имеет следующий вид:

$$\sigma_e = \frac{(\psi-1)(\sigma_1+\sigma_3)+\sqrt{(1-\psi)^2(\sigma_1+\sigma_3)^2+4\psi(\sigma_1-\sigma_3)^2-(1-\psi)(\sigma_1+\sigma_3)}}{2\psi} \le R_c . \qquad (3.21)$$

Здесь σ_e - так называемое напряжение, эквивалентное одноосному напряженному состоянию.

Используя формулу (3.21), можно посредством коэффициента запаса прочности *n* оценить степень опасности разрушения породной среды для любой точки однородного породного массива в окрестности выработки, сравнивая величину σ_e с пределом прочности на одноосное сжатие R_c:

$$n = \frac{R_c k_c}{\sigma_e} . \qquad (3.22)$$

Здесь k_c - коэффициент структурного ослабления породного массива.

Разрушение породной среды наступает при *n* = 1. Распределение изолиний величины *n* вокруг выработок является более информатив-

ным, чем распределение изолиний компонентов напряжений. По нему можно судить о степени возможного разрушения породного массива.

3.3. Эмпирический критерий прочности Хока-Брауна

По способу получения критерии прочности можно разделить на две большие группы: аналитические и эмпирические. Известны аналитические критерии прочности: Треска–Сен-Венана, Ю.И. Ягна, П.П. Баландина, И.Н. Миролюбова и т.п. К ним же относится и рассмотренный выше критерий (3.14). К наиболее популярным эмпирическим относятся критерии О. Мора, З.Т. Бенявского, Хока-Брауна и некоторые другие.

Эмпирические критерии прочности получают на основе обработки лабораторных испытаний горных пород в сложных напряженных состояниях и натурных измерений. Строго говоря, их применение должно ограничиваться теми горными породами и горно-геологическими условиями эксперимента, которые впоследствии подвергались обобщению на основе статистического и математического анализа.

Рассмотрим подробнее очень популярный в геомеханике эмпирический критерий прочности, который разработали Эверт Хок и Эдвин Т. Браун*. Его обобщенная формула имеет вид

$$\sigma_1 = \sigma_3 + R_c\left(m_b \frac{\sigma_3}{R_c} + s \right)^a , \qquad (3.23)$$

где σ_1 и σ_3 – максимальное и минимальное действующие напряжения, R_c – среднее значение предела прочности на одноосное сжатие породных образцов, m_b – константа Хока-Брауна, учитывающая генезис и состояние (качество) породного массива, s и a константы, вытекающие из аппроксимации степенной функцией огибающей кругов напряжений, полученных при объемном сжатии образцов в устройстве, подобном описанному ниже прибору Кармана.

Для нетронутого (ненарушенного) породного массива зависимость (3.23) превращается в следующую формулу

$$\sigma_1 = \sigma_3 + R_c\left(m_i \frac{\sigma_3}{R_c} + 1 \right)^{0,5} . \qquad (3.24)$$

Здесь константа m_i, в отличие от константы m_b, учитывает только генезис и текстуру горных пород ($4 \le m_i \le 33$).

Бóльшая величина m_i соответствует хрупким породам, чем она меньше, тем пластичнее порода, а при $m_i = 0$ имеет место идеальная пластичность.

Для нарушенного породного массива константа m_b определяется следующим образом:

$$m_b = m_i \exp\left(\frac{GSI - 100}{28}\right), \tag{3.25}$$

где GSI (Geological Strength Index) – параметр, учитывающий геологические особенности породного массива, в частности его структуру и наличие трещин ($5 \le GSI \le 100$). Параметр GSI во многом аналогичен параметру З.Т. Бенявского *RMR* (Rock Mass Rating).

Для породного массива «хорошего» качества ($GSI > 25$) имеем

$$s = \exp\left(\frac{GSI - 100}{9}\right), \quad a = 0{,}5. \tag{3.26}$$

*Hoek E. Practical Rock Engineering, 2000 Edition (Электрон. Ресурс) / Способ доступа http://www.rocscience.com/hoek/Practical Rock Engineering. – Загол. с экрана.

Для породного массива «плохого» качества ($GSI < 25$)

$$s = 0, \quad a = 0{,}65 - \frac{GSI}{200}. \tag{3.27}$$

На рис. 3.6 приведены значения геологического индекса прочности в соответствии с классификацией, разработанной Э.Хоком и Э.Т.Брауном. Численное значение GSI выбирается по указанной классификации на основе визуального обследования пород в естественных условиях.

С целью более плавного перехода от прочных пород (хорошего качества) к очень слабым (плохого качества) введен в рассмотрение дополнительный параметр D, учитывающий нарушенность породного массива, например, вследствие ведения взрывных работ. С учетом параметра D – «disturbance factor», константы m_b, s, a определяются следующими соотношениями:

$$m_b = m_i \exp\left(\frac{GSI - 100}{28 - 14D}\right), \tag{3.28}$$

$$s = \exp\left(\frac{GSI - 100}{9 - 3D}\right), \tag{3.29}$$

$$a = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\left(e^{-GSI/15} - e^{-20/3}\right). \tag{3.30}$$

Параметр D принимает значения от 0 для ненарушенной породы до 1 для очень нарушенной породы. Числовые значения параметра D выбираются на основе визуального обследования пород «in situ» и заключении об их качестве и степени нарушенности.

Следует отметить, что обобщенный критерий прочности Хока-Брауна предполагает введение пяти параметров: m_b, s, a, GSI, D, определение которых является в известной степени субъективной процедурой. Стремление максимально учесть в аналитическом выражении особенности рассматриваемого породного массива неизбежно делает эмпирические зависимости все более громоздкими и менее точными, учитывая разброс значений каждого из вводимых параметров. Погрешность, неизбежно возникающая в расчетах подземных сооружений в связи с неопределенностью при выборе исходных параметров, тем меньше, чем пластичнее породы, и тем больше, чем они хрупче.

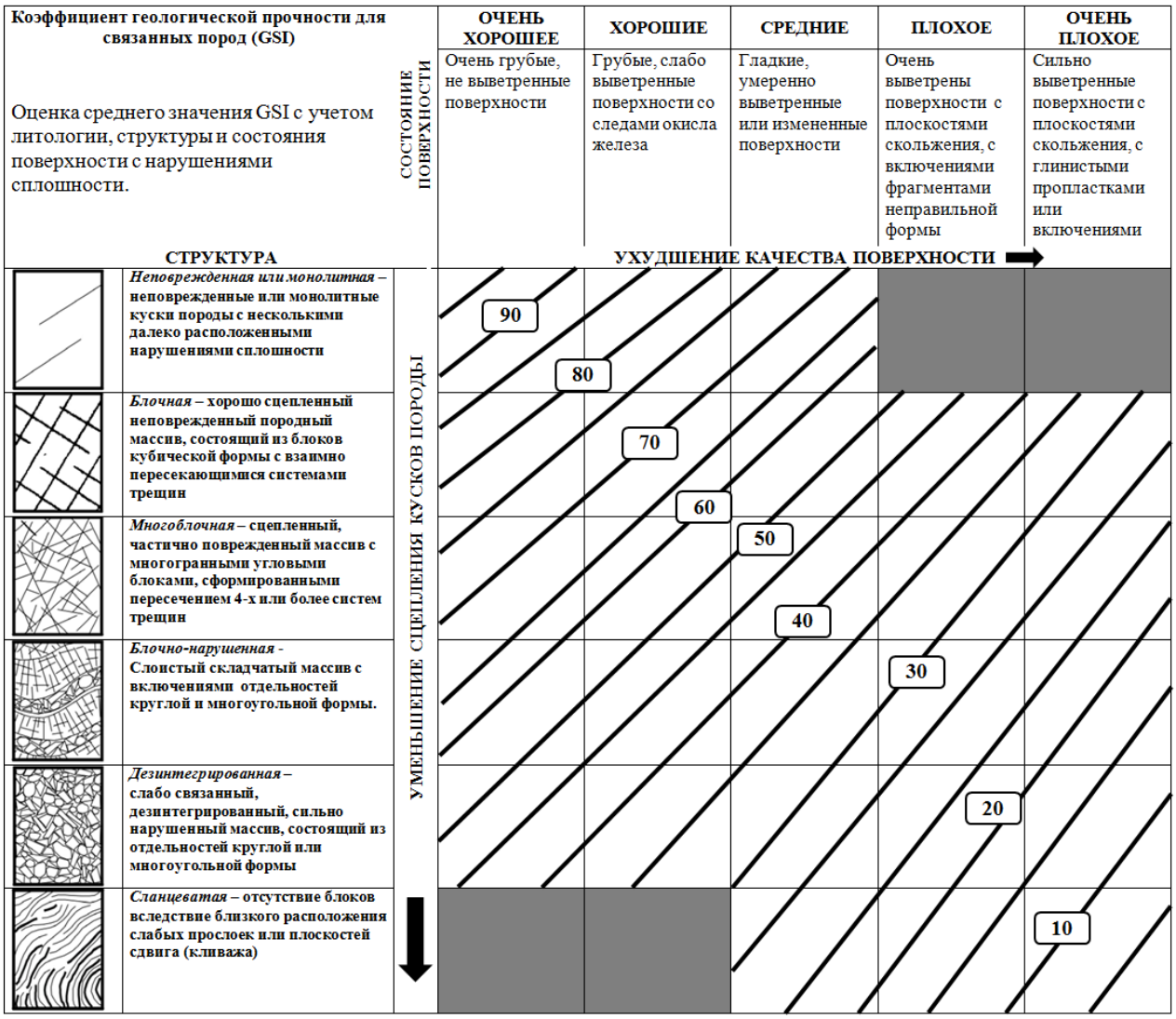


Рис. 3.6. Классификация геологического индекса прочности

3.4. Испытание горных пород в сложном напряженном состоянии

Математическое моделирование механических процессов, развивающихся вокруг горных выработок под действием сил гравитации и неотектоники, тем ближе соответствует действительности, чем лучше принятая теория прочности отражает природу и характер разрушения породной среды. Анализ современных представлений о прочности твердых тел показывает, что единой теории разрушения, пригодной для практического применения, на настоящий момент нет, несмотря на обширные аналитические и экспериментальные исследования, проводимые в этой области.

Как было отмечено выше, в инженерной практике наибольшее распространение получили феноменологические теории прочности. Не раскрывая причин, лежащих в основе процесса разрушения, они достаточно хорошо отражают поведение материалов при их предель-

ном деформировании в сложном напряженном состоянии. Инженерные теории прочности не универсальны, они годятся, в основном, для сравнительно узкого класса испытанных материалов в пределах искусственно создаваемых напряженных состояний. Этим в значительной мере объясняется довольно большое их количество: хорошо описывая процесс разрушения одних твердых тел, они мало пригодны для других, отличающихся структурой.

Одной из наиболее распространенных в механике горных пород является, как уже отмечалось выше, теория прочности Мора и ее модификации, которая полностью базируется на экспериментальных данных. Данные получают при испытаниях образцов горных пород в объемном напряженном состоянии. Один из приборов подобного рода был сконструирован Т. Карманом для проверки теории прочности О. Мора. Прибор имеет следующее устройство (рис. 3.5).

В камеру высокого давления (3) помещают образец горной породы цилиндрической формы (2), обернутый алюминиевой или медной фольгой. Усилие P_1 передается осевым плунжером (1) от пресса, на котором размещают прибор. Усилие - P_3 создается масляным насосом посредством плунжера гидромультипликатора (4). Таким образом, к торцам образца приложена нагрузка P_1, а к боковой поверхности P_3. В образце, соответственно, возникают напряжения σ_1 и $\sigma_2 = \sigma_3$. Образец доводят до разрушения и по результатам испытаний строят так называемые предельные круги Мора (рис. 3.6) в системе координат: «$\tau - \sigma$».

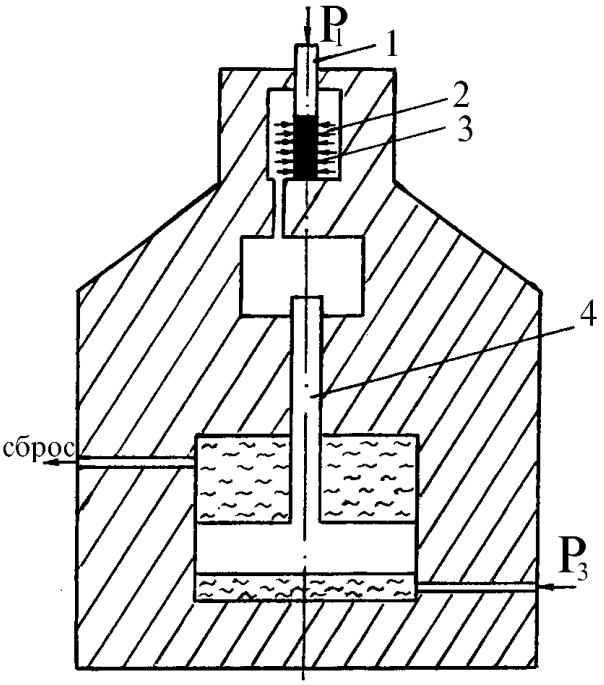


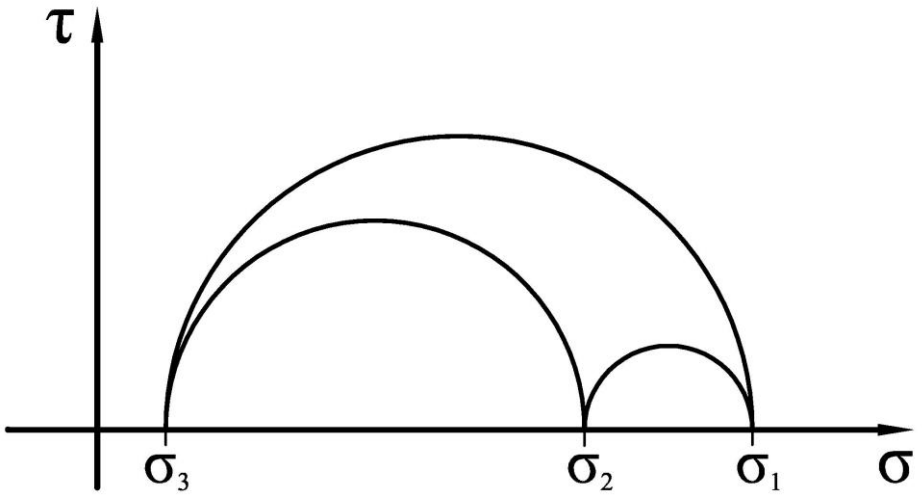
Рис. 3.5. Прибор Кармана: 1 – осевой плунжер, 2 – образец горной породы, 3 – камера высокого давления, 4 – плунжер гидромультипликатора

Для этого, в самом общем случае, на оси σ откладывают нормальные напряжения σ_1, σ_2 и σ_3 (рис. 3.6,а). На отрезках $\sigma_1 - \sigma_3$, $\sigma_2 - \sigma_3$ и $\sigma_1 - \sigma_2$, как на диаметрах, строят предельные для данного напряженного состояния круги Мора.

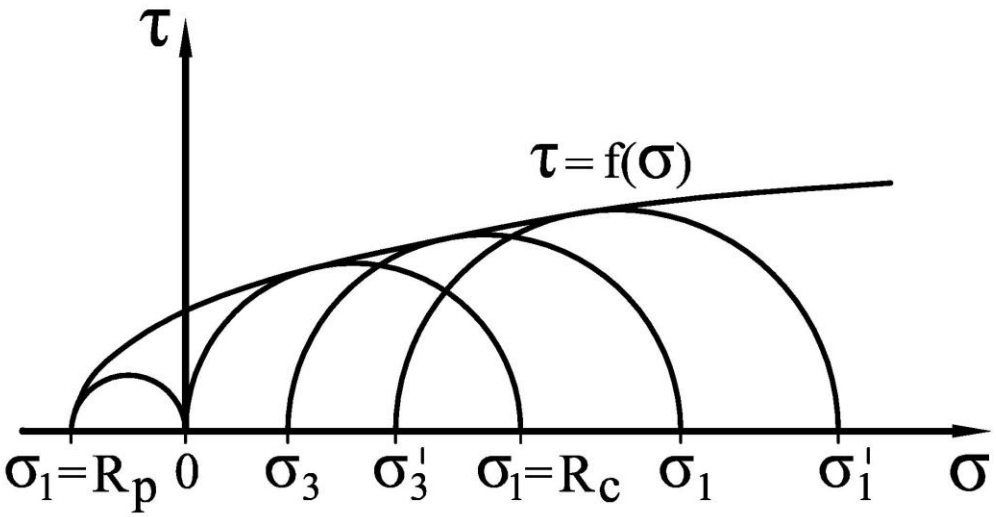
Прибор Кармана позволяет моделировать, как было сказано, объемное напряженное состояние с компонентами напряжений: $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$. Дальнейшие эксперименты на подобных приборах, но позволяющих уже реализовать схему нагружения образца кубической формы, когда $P_1 \neq P_2 \neq P_3$, позволили доказать, что влияние промежуточного по величине напряжения σ_2 не превышает 10% и, вообще говоря, находится в пределах точности измерений. Таким образом, прочность горных пород определяется, прежде всего, разностью наибольшего и наименьшего напряжений.

Предельные круги Мора, построенные для случая, когда $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, показаны на рис. 3.6,а. Таких кругов, меняя величину главных напряжений, можно построить сколь угодно много.

а)



б)



в)

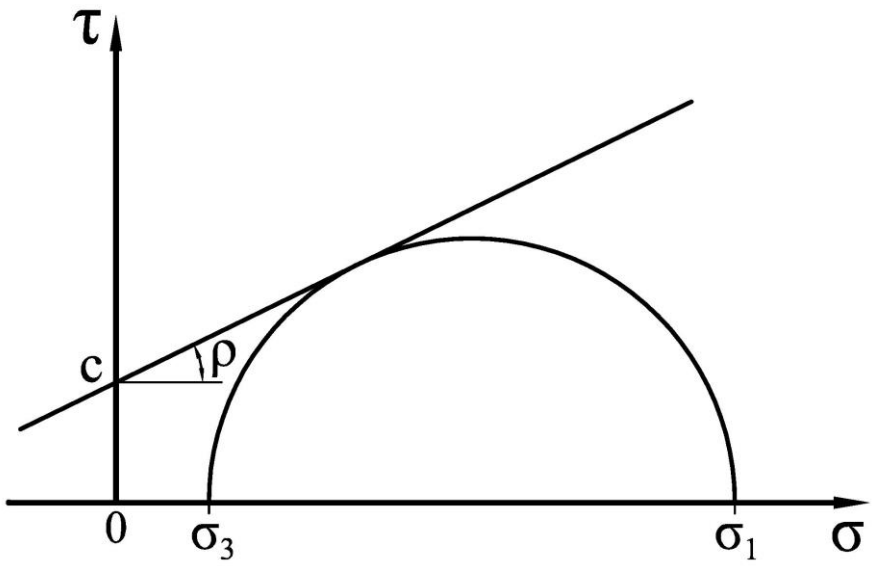


Рис. 3.6. Графическая интерпретация объемного напряженного состояния: а) влияние величины σ_2; б) криволинейная огибающая кругов Мора; в) прямолинейная огибающая кругов Мора

Соединяя круги плавной кривой, получают огибающую $\tau = f(\sigma)$, которая разделяет область опасных (выше кривой) и неопасных (ниже кривой) состояний. Такую кривую часто называют **паспортом прочности материала**. Она показана на рис. 3.6,б.

В ходе экспериментов Н. Карман подтвердил возможность практического использования теории прочности О. Мора и доказал высокую ее надежность.

Для решения упругопластических задач огибающую предельных кругов в теории прочности О. Мора необходимо аппроксимировать каким-то уравнением. Имеются такие описания в виде гиперболы, экспоненты [52, 75], циклоиды, кривой Перлина и др.

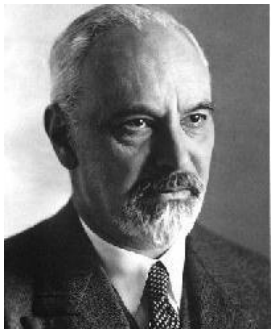
Нередко криволинейную огибающую заменяют прямолинейной, которая на оси τ отсекает отрезок, равный C, равный сцеплению, и наклонена к оси σ под углом ρ, называемым углом внутреннего трения (рис. 3.6,в). Следует отметить, что замена криволинейной огибающей прямой является грубым упрощением, не имеющим под собой физического обоснования.

Биографическая справка

1. Кулон, Шарль Огюстен (1736-1806) - французский физик. Автор работ по технической механике (статика сооружений) и механике грунтов, выполнил ряд исследований по трению скольжения и качения.

2. Иоффе, Абрам Федорович (1880-1960) – выдающийся советский физик, академик, один из создателей советской физической школы. Инициатор создания физико-технических институтов в Харькове, Днепропетровске, Томске. Основные труды в области прочности, пластичности, электропроводности твердых тел. Выполнил пионерские исследования полупроводников, впервые установил статистический характер вылета отдельных электронов при внешнем фотоэффекте.

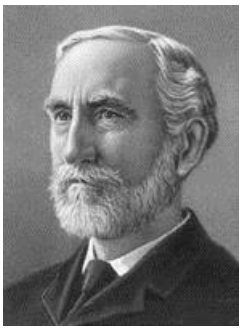
3. Лифшиц, Илья Михайлович (1916-1982) - советский физик-теоретик, академик АН СССР и УССР, основатель научной школы по физике твердого тела. Основные труды посвящены квантовой теории твердого тела, электронной теории металлов, физической кинетике, физике полимеров и др.



4. Прандтль, Людвиг (1875-1953) - немецкий ученый в области механики. Основные работы посвящены теории упругости и пластичности, гидроаэромеханике, газовой динамике.

5. Франк, Джеймс (1882-1964) - немецкий физик, изучал процессы столкновения электронов и атомов с молекулами, объяснил связь между внутримолекулярными силами и спектрами молекул.

6. Гиббс, Джозайя Уиллард (1839-1903) - американский физик-теоретик, один из основоположников термодинамики и статистической механики. Разработал теорию термодинамических потенциалов, открыл общее условие равновесия гетерогенных систем – правило фаз. Установил фундаментальный закон статистической физики – распределение Гиббса.



7. Журков, Серафим Николаевич (1905-1984) - советский физик, занимался исследованиями механических свойств твердых тел и полимеров, основатель термодинамического направления в теории прочности твердых тел.

8. Карман, Теодор (1881-1963) – ученый и практик в области строительной механики. Принимал участие в строительстве многих технически сложных инженерных объектов, в частности, подвесных мостов.

9. Мор, Кристиан Отто (1835-1918) - немецкий ученый в области строительной механики. Создатель одной из теорий прочности (теория прочности Мора), графических методов определения напряжений при сложном напряженном состоянии.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие модели твердых тел изучаются в механике разрушения?
2. Для оценки прочности каких материалов была создана микродефектная теория прочности А. Гриффитса?
3. Запишите основное уравнение теории прочности А. Гриффитса. В чём состоит её физическая суть?
4. В чем физическая суть термофлуктуационной теории прочности?
5. Назовите феноменологические теории прочности. Почему они так называются, каковы их достоинства и недостатки?
6. Что такое теория прочности О. Мора?
7. В чем особенность статистических теорий прочности?
8. Что такое «дилатон»?
9. Для каких целей был создан прибор Кармана?
10. Как влияет на прочность горных пород второе по величине напряжение σ_2?
11. Что такое «паспорт прочности»?
12. В чем заключаются недостатки прямолинейной огибающей предельных кругов О. Мора?
13. Охарактеризуйте эмпирический критерий прочности Хока-Брауна? В чём его достоинства и недостатки?